

整数区间上长极小零和序列的结构*

邓贵新¹, 曾祥能²

- (1. 广西师范学院数学与统计科学学院, 广西 南宁 530001;
2. 中山大学中法核工程与技术学院, 广东 珠海 519082)

摘要: 有限交换群上的零和问题已经有很长研究历史, 但是无限群上的零和问题的结论还比较少。主要研究整数集上的极小零和序列, 得到了有限区间 $[-m, n]$ 上所有长度不小于 $n + m - 2$ 的极小零和序列的结构。

关键词: 序列; 零和; 极小零和; Davenport 常数

中图分类号: O157 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2018) 02-0061-05

The structure of long minimal zero-sum sequences over integral intervals

DENG Guixin¹, ZENG Xiangneng²

- (1. College of Mathematics and Statistics, Guangxi Teachers Education University, Nanning 530001, China;
2. Sino-French Institute of Nuclear Engineering and Technology, Sun Yat-sen University, Zhuhai 519082, China)

Abstract: The research of zero-sum problems over finite abelian groups has a long history, while there are only a few results concerned about zero-sum problems over infinite groups. The minimal zero-sum sequences over integers are studied. The structure of minimal zero-sum sequences over an integral interval $[-m, n]$ whose lengths are at least $n + m - 2$ is obtained.

Key words: sequences; zero-sum; minimal zero-sum; Davenport constant

令 G 是一个交换群 (运算记为加法), G_0 是 G 的非空子集。 G_0 上的一个序列是一个有限序列, 其中的元素都包含在 G_0 中。称一个非空序列为零和的, 如果此序列的项加起来等于群 G 的单位元 0 。称一个零和序列为极小零和的, 如果它的任意非空真子序列都不是零和序列。

极小零和序列是零和理论的主要研究对象之一。此理论与群论, 图论, 拉姆齐理论, 以及分解理论有紧密的联系^[1-3]。零和理论中两个重要问题

就是计算 Davenport 常数和刻画极小零和序列的结构, 其中 G_0 上的 Davenport 常数 $D(G_0)$ 定义为 G_0 上的极小零和序列所能达到的最大长度。

Davenport 常数是以数学家 Davenport 的姓名所命名。在 20 世纪 60 年代, Davenport 在研究代数整数环上的分解问题时, 考虑了如下问题: 代数整数环上一个不可约元分解成素理想的乘积时, 这些素理想最多有多少个 (把重数算入)? 而此最大个数就是这个代数整数环的类群的 Davenport 常数,

* 收稿日期: 2017-08-23

基金项目: 国家自然科学基金 (11461010, 11301556); 广西科技厅开发项目 (桂科合 1599005-2-13); 广西自然科学基金 (2015GXNSFBA139012)

作者简介: 邓贵新 (1983 年生), 男; 研究方向: 组合数论; E-mail: dengguixin@live.com

通信作者: 曾祥能 (1984 年生), 男; 研究方向: 组合数论; E-mail: junevab@163.com

由此开启了这方面的研究。

当 G 是有限交换群时, 人们在这两个问题上取得了不少进展。现在我们已经知道了秩不大于 2 的有限交换群以及有限交换 p -群的 Davenport 常数。在极小零和序列的结构方面, 当 G 是一个有限循环群时, 我们已经知道许多结果^[4-7]。当 G 是秩为 2 的有限交换群时, 我们只知道达到最大长度即 $D(G)$ 的极小零和序列的结构^[8-9]。当 G 是一些结构比较简单的交换群时, 也有一些更进一步的结论^[10]。

当 G 是无限交换群时, 这方面的结果就比较少了。当 G 是无限循环群即 $G \cong \mathbf{Z}$ 时, 文献 [11] 证明了对称区间 $[-m, m], m > 1$ 的 Davenport 常数等于 $2m - 1$, 并完全刻画了这个长度的极小零和序列的结构。Plagne 等^[12]证明了对任意的正整数 $m, n, D([-m, n]) \leq m + n$, 并且等号成立当且仅当 $\gcd(m, n) = 1$ 。在等号成立的前提下, 他们也完全给出了长度等于 $m + n$ 的极小零和序列。同时, 他们也给出了对称区间 $[-m, m], m \geq 3$ 上长度为 $2m - 2$ 的极小零和序列的刻画。最近, 在 $n \geq m^2/2 - 1$ 条件下, 本文作者^[13]刻画了区间 $[-m, n]$ 上长度不小于 $n + \lfloor m/2 \rfloor + 1$ 的不可分极小零和序列的结构, 并由此得到了此区间的 Davenport 常数。在本文中, 将考虑一般的区间 $[-m, n]$, 刻画此区间上所有长度不小于 $n + m - 2$ 的极小零和序列。

1 记号与术语

我们将使用文 [2] 一书中的记号。令 \mathbf{N} 与 \mathbf{Z} 分别为自然数集与整数集。对所有实数 x 和 y , 令 $[x, y] = \{i \in \mathbf{Z} : x \leq i \leq y\}$ 。

令 G 是一个交换群 (运算记为加法), G_0 是 G 的非空子集。 G_0 上的一个序列是一个有限序列, 其中的元素都包含在 G_0 中。我们把 G_0 上的序列看成是由 G_0 生成的交换自由群胚 $F(G_0)$ 中的元素。显然 $F(G_0)$ 中的单位元就是空序列。一般地把 G_0 中的一个序列写为

$$S = g_1 \cdots g_r = \prod_{g \in G_0} g^{[v_g(S)]}$$

其中 $v_g(S)$ 是 g 在该序列中出现的次数, 称为 g 在 S 中的重数。把 $\|S\| = \sum_{g \in G_0} v_g(S)$ 称为 S 的长度, 即 S 中含的项数; $\sigma(S) = \sum_{g \in G_0} v_g(S)g$ 称为 S 的和。

如果 S 是整数集上一个序列, 那么记 S^+, S^-

分别为由 S 的大于 0, 小于 0 的部分构成的序列。称 T 为 S 的一个子列, 如果 $v_g(T) \leq v_g(S)$ 对任意 $g \in G_0$ 成立, 此时记为 $T \mid S$ 。称 S 的一个子列 T 为真子列, 如果 $T \neq S$ 。集合

$$\Sigma(S) = \{\sigma(T) : T \mid S, T \text{ 非空}\}$$

称为 S 的和集。

一个序列 S 称为

零和, 如果 $\sigma(S) = 0$ 。

极小零和, 如果 $\sigma(S) = 0$, 并且对 S 所有非空真子列 T 有 $\sigma(T) \neq 0$ 。

用 $A(G_0)$ 记 G_0 上的由所有极小零和序列构成的集合, 并定义 G_0 的 Davenport 常数为

$$D(G_0) = \sup\{\|S\| : S \in A(G_0)\}$$

由于整数上的零和序列和有限循环群上的零和序列有着密切联系, 我们引入如下概念。设 $n \in \mathbf{N}$, 我们称 \mathbf{Z} 上的一个序列 S 是模 n 零和 (模 n 极小零和), 如果 $\varphi_n(S)$ 在 \mathbf{Z}_n 中是零和 (极小零和), 其中 $\varphi_n : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}_n$ 是标准同态。设 S 是整数集上的一个序列, 我们有下面的关于零和与模 n 零和之间的联系。

如果 S 是零和的, 那么 S 是模 n 零和的。反之不一定对。

如果 S 是极小零和的, 那么 S 是模 n 零和的, 但不一定是模 n 极小零和的。

如果 S 是模 n 极小零和的并且 $\sigma(S) = kn, k > 0$, 那么 $(-n)^{[k]} \cdot S$ 是极小零和的。

2 一些引理

在本节中, 我们研究整数上的极小零和序列的一些性质。若极小零和序列 S 包含 0, 则 $S = 0$, 而且此序列是唯一的长度为 1 的极小零和序列。因此, 为了避免平凡情形, 在本节中我们总是假设所考虑的极小零和序列的长度都至少为 2, 特别地, 此序列不包含 0。

引理 1^[14] 设 S 是整数上的一个极小零和序列并且令 $u = \|S^-\|, v = \|S^+\|, \max(S) = n, \min(S) = -m$ 。那么有 $u \leq n, v \leq m$ 且 $uv \leq \sigma(S^+) = -\sigma(S^-)$ 。

推论 1 设 S 是整数上的一个极小零和序列并且令 $u = \|S^-\|, v = \|S^+\|, \max(S) = n, \min(S) = -m$ 。

(i) 如果 $u = n$, 那么有 $S^+ = n^{[v]}$, 且 S^- 是模 n 极小零和的;

(ii) 如果 $v = m$, 那么有 $S^- = (-m)^{[u]}$, 且 S^+

是模 m 极小零和的。

证明 由结论的对称性只需要证明 (i)。设 $S^+ = b_1 \cdots b_v$, 其中 $b_i \in [1, n]$ 。由引理 1, $nv \leq \sigma(S^+) = b_1 + \cdots + b_v \leq nv$ 。因此, $b_1 = \cdots = b_v = n$, 即 $S^+ = n^{[v]}$ 。

若 T 是 S^- 的一个模 n 零和子列且 $\sigma(T) = -kn, k \in \mathbf{N}$ 。那么

$$0 < -\sigma(T) \leq -\sigma(S^-) = \sigma(S^+) = nv$$

可得 $1 \leq k \leq v$, 这样 $T \cdot n^{[k]}$ 就是 S 的一个零和子列。由于 S 是极小的, 马上得到并且。因此 S^- 是模 n 极小零和的。证毕。

引理 2 (i) 设 $n \in \mathbf{N}$, S 是整数上一个长度为 n 的模 n 极小零和序列, 则存在与 n 互素的整数 k , 使得 S 中每一项都模 n 同余于 k 。

(ii) 设 $n \geq 3$, S 是整数上一个长度为 $n-1$ 的模 n 极小零和序列, 则存在与 n 互素的整数 k , 使得 S 中有 $n-2$ 项都模 n 同余于 k 。

证明 此结论众所周知。文 [5-6] 推广了此结论。

3 主要结论

在本节, 我们证明本文的主要结论, 即刻画区间 $[-m, n]$ 上长度至少为 $n+m-2$ 的极小零和序列。长度为 $n+m$ 的极小零和序列的结构已经在 [12] 中刻画了。

定理 1^[12] 设 S 为 $[-m, n]$ 上的一个长度为 $n+m$ 的序列。则 S 是极小零和序列当且仅当 $\gcd(n, m) = 1$ 且 $S = (-m)^{[n]} \cdot n^{[m]}$ 。

现在, 将分别刻画长度为 $n+m-1$ 与 $n+m-2$ 的极小零和序列。

定理 2 设 $m+n \geq 3$, S 为 $[-m, n]$ 上一个长度为 $n+m-1$ 的序列。则 S 是极小零和序列当且仅当以下之一成立:

- (i) $S = (-m)^{[n-1]} \cdot (n-1)^{[m]}, \gcd(m, n-1) = 1, n \geq 2$;
- (ii) $S = (-m)^{[n-1]} \cdot n^{[m-1]} \cdot (n-m), \gcd(m, n) = 1, n \neq m$;
- (iii) $S = (-m+1)^{[n]} \cdot n^{[m-1]}, \gcd(m-1, n) = 1, m \geq 2$ 。

证明 首先, 容易验证上述 3 个序列都是极小零和的。现在假设 S 是极小零和的。令 $u = \|S^-\|, v = \|S^+\|$ 。由引理 1 有 $u \leq n, v \leq m$ 。结合 $u+v = m+n-1$, 有 $(u, v) = (n, m-1)$ 或 $(n-1, m)$ 。

如果 $v_n(S) = 0$ 或 $v_{-m}(S) = 0$, 那么 S 是 $[-m, n-1]$ 或 $[-m+1, n]$ 上的极小零和序列。这样

就归结到了定理 1, 在定理 1 中用 $n-1$ 代替 n 或者用 $m-1$ 代替 n , 就得到 $S = (-m)^{[n-1]} \cdot (n-1)^{[m]}$ 或 $S = (-m+1)^{[n]} \cdot n^{[m-1]}$ 。

下设 $\min\{v_n(S), v_{-m}(S)\} \geq 1$, 分如下两个子情形。

情形 1 $(u, v) = (n-1, m)$ 。由推论 1, $S^- = (-m)^{[n-1]}$ 且 S^+ 是一个长度为 m 的模 m 极小零和序列。又因为 $n \in S^+$, 由引理 2, $\gcd(n, m) = 1$ 且 S^+ 的每一项都模 m 同余于 n 。令 $S^+ = b_1 \cdots b_m$, 其中 $b_i \in [1, n]$ 。则

$$m(n-1) = \sigma(S^+) = b_1 + \cdots + b_m \leq mn$$

且 $b_i \equiv n \pmod{m}$ 。因此, S^+ 的项 b_i 中有 $m-1$ 个等于 n , 还有一个等于 $n-m > 0$, 即 $S = (-m)^{[n-1]} \cdot n^{[m-1]} \cdot (n-m)$ 。

情形 2 $(u, v) = (n, m-1)$ 。用情形 1 中同样的讨论知 $S^+ = n^{[m-1]}$, $S^- = (-m)^{[n-1]} \cdot (-m+n)$, $n-m < 0$ 。则 $S = (-m)^{[n-1]} \cdot n^{[m-1]} \cdot (n-m)$ 。

下面将证明最后一个主要定理。由于对称性, 不妨假设 $1 \leq m \leq n$ 。

定理 3 设 $1 \leq m \leq n, m+n \geq 5$, S 为 $[-m, n]$ 上一个长度为 $n+m-2$ 的序列。则 S 是极小零和序列当且仅当以下之一成立:

- (i) $S = (-m)^{[n-2]} \cdot (n-2)^{[m]}, \gcd(m, n-2) = 1$;
- (ii) $S = (-m)^{[n-2]} \cdot (n-1)^{[m-1]} \cdot (n-1-m), \gcd(m, n-1) = 1$;
- (iii) $S = (-m)^{[n-2]} \cdot n^{[m-1]} \cdot (n-2m), \gcd(m, n) = 1, n \neq 2m$;
- (iv) $S = (-m)^{[n-2]} \cdot n^{[m-2]} \cdot (n-m)^{[2]}, \gcd(m, n) = 1, n > m \geq 2$;
- (v) $S = (-m+2)^{[n]} \cdot n^{[m-2]}, \gcd(m-2, n) = 1, m \geq 3$;
- (vi) $S = (-m+1)^{[n-1]} \cdot (n-1)^{[m-1]}, \gcd(m-1, n-1) = 1, m \geq 2$;
- (vii) $S = (-m+1)^{[n-1]} \cdot n^{[m-2]} \cdot (n-m+1), \gcd(m-1, n) = 1, m \geq 2$;
- (viii) $S = (-1)^{[n-2]} \cdot (-2) \cdot n, m = 2$ 。

证明 首先容易验证上述所有序列都是极小零和的。再假设 S 是极小零和的。令 $u = \|S^-\|, v = \|S^+\|$ 。由引理 1 有 $u \leq n, v \leq m$ 。结合 $u+v = m+n-2$, 有 $(u, v) = (n-2, m), (n, m-2)$ 或 $(n-1, m-1)$ 。

情形 1 $(u, v) = (n-2, m)$ 。由推论 1, $S = (-m)^{[n-2]} \cdot S^+$, 且 S^+ 是一个长度为 m 的模 m 极小

零和序列。令 $S^+ = b_1 \cdots b_m$, 其中 $b_i \in [1, n]$ 。不妨设 $b_1 \leq \cdots \leq b_m$ 。由引理 2, $\gcd(b_m, n) = 1$ 且对任意 $i \in [1, m]$ 有 $b_i \equiv b_m \pmod{m}$ 。还有

$$m(n-2) = \sigma(S^+) = b_1 + \cdots + b_m \leq mb_m$$

如果 $b_m \leq n-2$, 则 $b_1 = \cdots = b_m$, 即条件 (i) 成立。

如果 $b_m = n-1$, 则 $b_1 = n-1-m > 0$, $b_2 = \cdots = b_m = n-1$, 即条件 (ii) 成立。

如果 $b_m = n$, 则 $b_1 = n-2m > 0$, $b_2 = \cdots = b_m = n$; 或者 $m \geq 2$, $b_1 = b_2 = n-m > 0$, $b_3 = \cdots = b_m = n$ 。因此条件 (iii) 或条件 (iv) 成立。

情形 2 $(u, v) = (n, m-2)$ 此情形的证明与情形 1 相同。可得如下 4 种情形:

① $S = (-m+2)^{[n]} \cdot n^{[m-2]}$, $\gcd(m-2, n) = 1$, $m \geq 3$ 。即条件 (v) 成立。

② $S = (-m+1)^{[n-1]} \cdot (-m+1+n) \cdot n^{[m-2]}$, $\gcd(m-1, n) = 1$, $m \geq 3$, $m-1 > n$ 。与 $m \leq n$ 矛盾。

③ $S = (-m)^{[n-1]} \cdot (-m+2n) \cdot n^{[m-2]}$, $\gcd(m, n) = 1$, $m \geq 3$, $m > 2n$ 。与 $m \leq n$ 矛盾。

④ $S = (-m)^{[n-2]} \cdot n^{[m-2]} \cdot (n-m)^{[2]}$, $\gcd(m, n) = 1$, $m \geq 2$, $n < m$ 。与 $m \leq n$ 矛盾。

情形 3 $(u, v) = (n-1, m-1)$ 。此时 $n, m \geq 2$ 。设

$$S^- = (-m)^{[a]} \cdot (-m+1)^{[b]} \cdot (-\alpha_1) \cdots (-\alpha_k),$$

$$S^+ = \beta_1 \cdots \beta_t \cdot (n-1)^{[c]} \cdot n^{[d]}$$

其中 $\alpha_i \in [1, m-2]$, $\beta_j \in [1, n-2]$, $k, t \geq 0$ 。

如果 $a = 0$, 则 S 是 $[-m+1, n]$ 上长度为 $n + (m-1) - 1$ 的极小零和序列。在定理 2 中, 用 $m-1$ 替换 m , 可得

⑤ $S = (-m+1)^{[n-1]} \cdot (n-1)^{[m-1]}$, $\gcd(m-1, n-1) = 1$, $m \geq 2$ 。即条件 (vi) 成立。

⑥ $S = (-m+1)^{[n-1]} \cdot n^{[m-2]} \cdot (n-m+1)$, $\gcd(m-1, n) = 1$, $m \geq 2$ 。即条件 (vii) 成立。

⑦ $S = (-m+2)^{[n]} \cdot n^{[m-2]}$, $\gcd(m-2, n) = 1$, $m \geq 3$ 。与 $(u, v) = (n-1, m-1)$ 矛盾。

如果 $d = 0$, 则 S 是 $[-m, n-1]$ 上长度为 $(n-1) + m - 1$ 的极小零和序列。在定理 2 中, 用 $n-1$ 替换 n , 可得

⑧ $S = (-m)^{[n-2]} \cdot (n-2)^{[m]}$, $\gcd(m, n-2) = 1$, $m \geq 2$ 。与 $(u, v) = (n-1, m-1)$ 矛盾。

⑨ $S = (-m)^{[n-2]} \cdot (n-1)^{[m-1]} \cdot (n-1-m)$, $\gcd(m, n-1) = 1$, $n-1 \neq m$ 。由于 $(u, v) = (n-1, m-1)$, 可得 $n-1-m < 0$ 。再由 $n \geq m$, 可得 $n = m$ 。即条件 (ii) 成立, 且 $n = m$ 的情形。

⑩ $S = (-m+1)^{[n-1]} \cdot (n-1)^{[m-1]}$, $\gcd(m-1, n-1) = 1$, $m \geq 2$ 。即条件 (vi) 成立。

因此, 我们现在假设 $\min\{a, d\} \geq 1$ 。由于极小零和序列 S 的长度至少是 3, 所以 $m < n$ (否则 $(-m) \cdot n$ 是 S 的零和真子列)。同样地, 若 S 中还包含有 $n-1$, 则 $m < n-1$ 。

如果 $a \geq c+d$, 我们把 S^+ 中的 n 以及 $n-1$ 均与一个 $-m$ 加起来得到另一个极小零和序列

$$T = (-m)^{[a-c-d]} \cdot (-m+1)^{[b]} \cdot (-\alpha_1) \cdots (-\alpha_k) \cdot \beta_1 \cdots \beta_t \cdot (n-1-m)^{[c]} \cdot (n-m)^{[d]}$$

其中 T^- 的长度为

$$n-1-c-d = n-1-(m-1-t) = n-m-t$$

T^+ 的长度为 $m-1$ 。对序列 T 应用引理 1, 可得

$$(n-m+t)(m-1) \leq \beta_1 + \cdots + \beta_t + c(n-1-m) + d(n-m) \leq t(n-2) + c(n-1-m) + (m-1-t-c)(n-m) = t(m-2) - c + (m-1)(n-m) = (m-1)(n-m+t) - t - c$$

因此 $t = c = 0$, $d = m-1$, 也即 $S^+ = n^{[m-1]}$, 此时 S^- 是长度为 $n-1$ 的模 n 极小零和序列。由引理 2, S^- 中有 $n-2$ 项都是模 n 同余的。再由 S^- 的项都是在 $[-m, -1]$ 中, 且 $m \leq n$, 可得 $S^- = (-g)^{[n-2]} \cdot h$, 其中 $g, h \in [1, m]$ 。若 $g \leq m-1$, 则

$$(m-1)n = -\sigma(S^-) = (n-2)g + h \leq (n-2)(m-1) + m = (m-1)n - m + 2 \leq (m-1)n$$

因此上述不等式实际上都是等式, 则 $m = 2$, $g = m-1 = 1$, $h = m = 2$, 也即条件 (viii) 成立。若 $g = m$, 则 $(m-1)n = -\sigma(S^-) = (n-2)m + h$ 。由此可得 $h = 2m - n$, 即条件 (iii) 成立。

如果 $a < c+d$, 此时有 $m-1 \geq c+d > a \geq 1$, 则 $m \geq 3$ 。在 S^+ 中, 挑出 c_1 个 n 和 $d_1 = a - c_1$ 个 $n-1$, 其中 $c_1 \leq c$, $d_1 \leq d$ 。再将它们分别与一个 $-m$ 加起来得到另一个极小零和序列

$$T_{c_1, d_1} = (-m+1)^{[b]} \cdot (-\alpha_1) \cdots (-\alpha_k) \cdot \beta_1 \cdots \beta_t \cdot (n-1)^{[c-c_1]} \cdot n^{[d-d_1]} \cdot (n-1-m)^{c_1} \cdot (n-m)^{d_1}$$

对 T_{c_1, d_1} 应用推论 1, 可得 $k = 0$, $b = n-1-a$, $T_{c_1, d_1}^- = (-m+1)^{[n-1-a]}$, T_{c_1, d_1}^+ 是长度为 $m-1$ 的模 $m-1$ 极小零和序列。由引理 2, T_{c_1, d_1}^+ 的每一项都是模 $m-1$ 同余的。

若 $t > 0$, 则令 $d_1 = \min\{d, a\} \geq 1$, 此时有 $n-m \in T_{c_1, d_1}^+$ 。因此 $\beta_1 \equiv n-m \pmod{m-1}$ 。又因为

$\beta_1 \leq n - 2$, 所以 $\beta_1 \leq n - m$ 。因此对 S 应用引理 1,

$$\begin{aligned} (m - 1)(n - 1) &\leq \sigma(S^+) = \\ \beta_1 + \cdots + \beta_t + c(n - 1) + dn &\leq \\ n - m + (c + t - c)(n - 1) + & \\ (m - 1 - c - t)n &= \\ (m - 1)(n - 1) - c - t & \end{aligned}$$

则 $c = t = 0$, 矛盾。

若 $t = 0$, 此时有 $b = n - 1 - a, c = m - 1 - d$,

$$\begin{aligned} S &= (-m)^{[a]} \cdot (-m + 1)^{[n-1-a]} \cdot \\ & (n - 1)^{[m-1-d]} \cdot n^{[d]} \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} \sigma(S^+) &= (m - 1 - d)(n - 1) + dn = \\ & (m - 1)(n - 1) + d, \\ -\sigma(S^-) &= am + (n - 1 - a)(m - 1) = \\ & (m - 1)(n - 1) + a \end{aligned}$$

所以 $a = d$ 。再由 $c + d > a$, 可知 $c > 0$ 。现在, 在序列 T_{c_1, d_1} 中, 令 $c_1 = \min\{c, a\}$, 则 $n - 1 - m, n \in T_{c_1, d_1}^+$ 。因此 $n - 1 - m \equiv n \pmod{m - 1}$, 从而 $m - 1 \mid 2$ 。又因为 $m \geq 3$, 所以 $m = 3$ 。此时有 $a = d = c = 1, S = (-3) \cdot (-2)^{[n-2]} \cdot (n - 1) \cdot n$ 。注意到 $n - 1$ 或 n 是偶数, 且 $n \geq 3$, 则 $(-2)^{[(n-1)/2]} \cdot (n - 1)$ 或 $(-2)^{[n/2]} \cdot n$ 是 S 的零和真子列, 矛盾。

参考文献:

[1] GAO W, GERODINGER A. Zero-sum problems in finite abelian groups: A survey [J]. *Expositiones Mathematicae*, 2006, 24(4): 337 - 369.

[2] GERODINGER A, HALTER-KOCH F. Non-unique factorizations: algebraic, combinatorial and analytic theory [M]. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2006.

[3] GERODINGER A, RUZSA I. Combinatorial number theory and additive group theory, [M]. Basel: Birkhäuser, 2009.

[4] 官欢欢, 曾祥能, 袁平之. 零和自由序列 $F(5)$ 的刻画 [J]. *中山大学学报(自然科学版)*, 2010, 49(3): 1 - 4.

GUAN H H, ZENG X N, YUAN P Z. Description of the invariant $F(5)$ of zero-sum-free sequence [J]. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni*, 2010, 49(3): 1 - 4.

[5] SAVCHEV S, CHEN F. Long zero-free sequence in finite cyclic groups [J]. *Discrete Mathematics*, 2007, 307(22): 2671 - 2679.

[6] YUAN P. On the index of minimal zero-sum sequences over finite cyclic groups [J]. *Journal of Combinatorial Theory; Series A*, 2007, 114(8): 1545 - 1551.

[7] ZENG X, YUAN P, LI Y. On the structure of long unsplitable minimal zero-sum sequences [J]. *Acta Arithmetica*, 2016, 176(2): 131 - 159.

[8] GAO W, GERODINGER A, GRYNKIEWICZ D. Inverse zero-sum problem III [J]. *Acta Arithmetica*, 2010, 141(2): 103 - 152.

[9] REIHER C. A proof of the theorem according to which every prime number possesses property B [D]. Germany: University of Rostock, 2010.

[10] 官欢欢, 袁平之, $C_2 \oplus C_{2n}$ 上不可分原子的结构 [J]. *中山大学学报(自然科学版)*, 2013, 52(5): 78 - 81.

GUAN H H, YUAN P Z. The structure of unsplitable atoms over $C_2 \oplus C_{2n}$ [J]. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni*, 2013, 52(5): 78 - 81.

[11] SAHS M, SISSOKHO P, TORF J. A zero-sum theorem over Z [J]. *Integers*, 2013, 13: A70.

[12] PLAGNE A, TRINGALI S. The Davenport constant of a box [J]. *Acta Arithmetica*, 2015, 171(3): 197 - 219.

[13] DENG G, ZENG X. Long minimal zero-sum sequences over a finite subset of Z [J]. *European Journal of Combinatorics*, 2018, 67: 78 - 86.

[14] SISSOKHO P. A note on minimal zero-sum sequences over Z [J]. *Acta Arithmetica*, 2014, 166(3): 279 - 288.